# Formes de Hankel

Geoffrey Deperle

Leçons associées :
- 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.
- 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
- 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et application.

Le but de ce développement est de montrer le théorème suivant :

**Théorème.** *Soit $P$ un polynôme réel de degré $n$ unitaire, soit $x_1, \dots, x_t$ ses racines distinctes avec $x_k$ de multiplicité $m_k \in \mathbb{N}$. En notant $s_k = m_1 x_1^k + \dots + m_t x_t^k$ les sommes de Newton. La forme quadratique $\sigma : (z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} s_{i+j} z_i z_j$ définit une forme quadratique sur $\mathbb{R}$ de signature $\left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2}\right)$ avec*
- *$r$ le nombre de racines réelles de $P$*
- *$t$ le nombre de racines distinctes de $P$*

*Ainsi en notant $\operatorname{sgn}(\sigma_{\mathbb{R}}) = (p,q)$, on a $r = p - q$.*

**Preuve :** $\sigma_{\mathbb{C}}$ est un polynôme homogène de degré 2 sur $\mathbb{C}$ donc définit une forme quadratique sur $\mathbb{C}$. De plus, les $s_k$ sont des polynômes symétriques en les $n$-racines (avec multiplicité) de $P$ donc ce sont des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires des fonctions symétriques élémentaires en les racines. Or, comme $P$ est unitaire, les fonctions symétriques élémentaires sont au signe près les coefficients de $P$ sont sont réelles.
Ainsi, $\sigma_{\mathbb{C}}$ définit une forme quadratique $\sigma_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}^n$. Notons $(p,q)$ sa signature.

### Étape 1 : Montrons que le rang de $\sigma_{\mathbb{R}}$ est $t$, le nombre de racines distinctes de $P$.

Décomposons $\sigma_{\mathbb{R}}$ selon une base bien choisie.
Soit $\varphi_k$ la forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$ donnée par :

$$\varphi_k(z_0, \dots, z_{n-1}) = z_0 + x_k z_1 + x_k^2 z_2 + \dots + x_k^{n-1} z_{n-1}$$

Montrons que les $(\varphi_k)_{k \in [\![1,t]\!]}$ sont libres sur $\mathbb{C}$ :
On a $\varphi_k = e_0^* + x_k e_1^* + \dots + x_k^{n-1} e_{n-1}^*$. Donc la matrice des $\varphi_k$ dans la base duale $(e_0^*, \dots, e_{n-1}^*)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_0 & & & x_t \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^{n-1} & \dots & \dots & x_t^{n-1} \end{pmatrix}$$

C'est une matrice extraite d'une matrice de Vandermonde inversible car les $x_k$ sont distincts donc elle est de rang $t$ donc les $\varphi_k$ sont libres.

De plus, le coefficient de $z_i z_j$ dans $\sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$ vaut $\begin{cases} \sum_{k=1}^{t} 2m_k x_k^i x_k^j = \sum_{k=1}^{t} 2m_k m_k^{i+j} = 2s_{i+j} & \text{si } i \neq j \\ \sum_{k=1}^{t} m_k x_k^{2i} = s_{i+j} & \text{si } i = j \end{cases}$

D'où

$$\sigma = \sum_{k=1}^{t} m_k \varphi_k^2$$

Ainsi, $\mathrm{rg}_{\mathbb{C}}\sigma = t$ car les $\varphi_k$ sont indépendants. Or, par invariance du rang par extension de corps, le rang de la matrice (complexe) de $\sigma$ est le même rang que la matrice (réelle) de $\sigma_{\mathbb{R}}$ donc $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}}\sigma = t = p + q$.

**Étape 2 : Calculons la signature $\sigma_{\mathbb{R}}$**

En décomposant selon les racines réelles et non réelles :

$$\sigma = \sum_{k \in R} m_k \varphi_k^2 + \sum_{k \in I} m_k \varphi_k^2$$

avec $R = \{k \in [\![1, t]\!], x_k \in \mathbb{R}\}$ et $I = [\![1, t]\!] \setminus R$.
Or, si $x_k$ est racine de $P$ non réelle, $\overline{x_k}$ est racine de $P$ avec la même multiplicité donc si $J$ est une partie de $I$ tel que $|J| = \frac{|I|}{2}$,

$$\sigma = \sum_{k \in R} m_k \varphi_k^2 + \left( \sum_{k \in J} m_k \varphi_k^2 + \sum_{k \in J} m_k \overline{\varphi_k}^2 \right)$$

Or, $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 + \overline{z}^2 = 2\mathrm{Re}(z)^2 - 2\mathrm{Im}(z)^2$,

$$\sigma = \sum_{k \in R} m_k \varphi_k^2 + 2 \sum_{k \in J} m_k (\mathrm{Re}(\varphi_k)^2 + \mathrm{Im}(\varphi_k)^2)$$

Cette décomposition constitue une décomposition de $\sigma_{\mathbb{R}}$ comme combinaison linéaire des carrés de $t$ formes réelles $\varphi_k, k \in R, \mathrm{Re}(\varphi_k), \mathrm{Im}(\varphi_k), k \in J$. Montrons que ces formes linéaires sont indépendantes.
Quitte à ré-ordonner, supposons $x_1, \dots, x_r$ les racines réelles de $P$ et $x_{r+1}, \dots, x_{r+s}$ les racines non réelles de $P$. La matrice de la famille $(\varphi_k, k \in R, \mathrm{Re}(\varphi_k), \mathrm{Im}(\varphi_k), k \in J)$ dans la base duale est

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & \dots & x_r & \mathrm{Re}(x_{r+1}) & \dots & \mathrm{Re}(x_{r+s}) & \mathrm{Im}(x_{r+1}) & \dots & \mathrm{Im}(x_{r+s}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_r^{n-1} & \mathrm{Re}(x_{r+1^{n-1}}) & \dots & \mathrm{Re}(x_{r+s^{n-1}}) & \mathrm{Im}(x_{r+1^{n-1}}) & \dots & \mathrm{Im}(x_{r+s^{n-1}}) \end{pmatrix}$$

Donc en effectuant pour tout $j \in [\![r+1, r+s]\!], C_j \leftarrow C_j + iC_{j+s}$, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & \dots & x_r & x_{r+1} & \dots & x_t & \mathrm{Im}(x_{r+1}) & \dots & \mathrm{Im}(x_{r+s}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & & x_r^{n-1} & x_{r+1^{n-1}} & \dots & x_t^{n-1} & \mathrm{Im}(x_{r+1^{n-1}}) & \dots & \mathrm{Im}(x_{r+s^{n-1}}) \end{pmatrix}$$

La matrice extraite en extrayant les $t$ premières colonnes et les $t$ premières lignes est une matrice extraite d'une matrice de Vandermonde associé à la famille $x_1, \dots, x_t$ distincts donc le rang (complexe) de cette famille est $t$ donc par invariance du rang par extension de corps, la famille $(\varphi_k, k \in R, \mathrm{Re}(\varphi_k), \mathrm{Im}(\varphi_k), k \in J)$ est de rang $t$ donc indépendante.
Comme les $m_k$ sont strictement positifs, $\mathrm{sgn}(\sigma_{\mathbb{R}}) = (|R| + |J|, |J|)$. Comme $|J| = \frac{t-r}{2}$, on obtient le résultat. $\square$

# Annexe

Pour mettre en pratique cette méthode de dénombrement de racines :

- On calcule les sommes de Newton algorithmiquement grâce à la formule les reliant aux fonction symétriques élémentaires donc aux coefficients de $P$ (sans avoir à calculer les racines).
- On dispose de deux méthodes pour calculer la signature : l'algorithme de Gauss et le critère de Sylvester.

## Application pour les polynômes de degré 2

Soit $P = aX^2 + bX + c = a(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a})$ de racines complexes $\alpha_1, \alpha_2$.
On a $s_0 = 1 + 1, s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{-b}{a}, s_2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$.
Donc la matrice de la forme quadratique est $H = \begin{pmatrix} 2 & \frac{-b}{a} \\ \frac{-b}{a} & \frac{b^2-2c}{a^2} \end{pmatrix}$.
On peut calculer la signature avec le critère de Sylvester. En notant $\Delta_1$ et $\Delta_2$ les deux mineurs principaux de $H$, on a : $\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 2\frac{b^2-2ac}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2-4ac}{a^2}$.
D'où $\mathrm{sgn}(H) = \begin{cases} (2,0) & \iff b^2 - 4ac > 0 \\ (1,1) & \iff b^2 - 4ac < 0 \\ (1,0) & \iff b^2 - 4ac = 0 \end{cases}$.

# Références


[1] Philippe Caldero et Marie Peronnier. *Carnet de voyage en Algébrie*. Calvage  Mounet, 2019.